Dossier n°70 : Exemples d'étude du comportement local de fonctions (approximation par une fonction affine, …). Applications.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 13 juin 2004
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

L'étude des fonctions commence en troisième avec les fonctions affines.

En Seconde, on poursuit cette étude avec les variations, la recherche d'extremums et l'introduction des fonctions usuelles.

En Première S et ES, on introduit les notions de limites, de dérivation, de tangente à la courbe et d'approximation affine d'une fonction.

Je choisis donc de situer ce dossier en Première S et ES.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

L'étude des fonctions faite en Seconde donne le comportement global (variations et ensemble de définition) et quelques valeurs locales (image d'un point, extremum).

En Première, l'introduction de la dérivation va permettre de faire une étude plus précise des fonctions et notamment au voisinage d'un point particulier.

En particulier, l'approximation affine par la méthode d'Euler va permettre d'approcher une fonction au voisinage d'un point.

D'autre part, l'étude locale d'une fonction va permettre de résoudre des problèmes d'optimisation.

L'objectif de ce dossier est donc de présenter les principaux éléments de l'étude locale d'une fonction et leurs différentes applications.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter quatre exercices de niveau Première S et ES :

- l'exercice n°1 propose un exemple d'étude du comportement local d'une fonction en certains points ;
- l'exercice n°2 propose un exemple d'approximation affine et une application aux pourcentages ;
- l'exercice n°3 propose de résoudre un problème d'optimisation ;
- l'exercice n°4 propose d'utiliser l'approximation affine d'une fonction pour un donner une courbe « approchée ».

La dérivation étant un outil important pour l'étude des fonctions en Première, rappelons les définitions suivantes :

Définition 1 :

f est une fonction et a un point de son ensemble de définition.

On dit que **la fonction f est dérivable au point a** si la fonction $h \to \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle l en zéro.

Cette limite l est appelée **le nombre dérivé de f au point a**. On le note f'(a).

Définition 2 :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f. D désigne l'intervalle ou une réunion d'intervalles inclus dans D_f.

On dit que **f est dérivable sur D** si elle est dérivable en tout point de D.

Définition 3 :

C est la courbe représentative d'une fonction f dérivable en un point a. **La tangente à C au point A(a ; f(a))** est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est f'(a).

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Etudier le comportement local en quelques points de f : $x \rightarrow \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$ définie sur IR\{0}.

Méthode :

- Ecrire f sous la forme ax + b + h(x) où h tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$;
- Limites en $+\infty$ et 0 (asymptotes) ;
- Points d'intersection avec l'axe des abscisses ;
- Tangente en 1 ;
- Variations de f ;
- Position de C par rapport aux asymptotes et aux tangents étudiées.

Outils :

- Limite de fonctions ;
- *Définition 4 :*

  Si f(x) = ax + b + h(x) avec $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$, on dit que **la droite d'équation y = ax+ b est asymptote à C_f en $+\infty$.**
- *Définition 5 :*

  Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que **la droite d'équation x = a est asymptote verticale à C_f.**
- Résolution des équations du second degré ;
- *Proposition 6 :*

  Une équation de la tangente à C au point A(a ; f(a)) est y = f'(a)(x-a) + f(a).

Commentaire :

La notion d'extremum local ou global n'est pas utilisée dans cet exercice mais peut être dégagée lors de l'étude des variations de f.

III.2 Exercice n°2.

Buts :

- Déterminer et étudier l'approximation affine locale de $(1+h)^3$.
- Appliquer ce résultat aux pourcentages.

Méthode :

C est la courbe représentative d'une fonction f dérivable en un point a et T la tangente à C au point A(a ; f(a)).

Comme la tangente T semble proche de C autour du point A, on pense à remplacer C par T autour de A. Autrement dit, on remplace localement la fonction f par la fonction affine représentée par T c'est à dire, on remplace le réel f(a+h) par le réel f(a) + f'a)h pour h voisin de zéro.

On dit alors que **f(a) + f'(a)h est l'approximation affine locale de f(a+h). par la méthode d'Euler**.

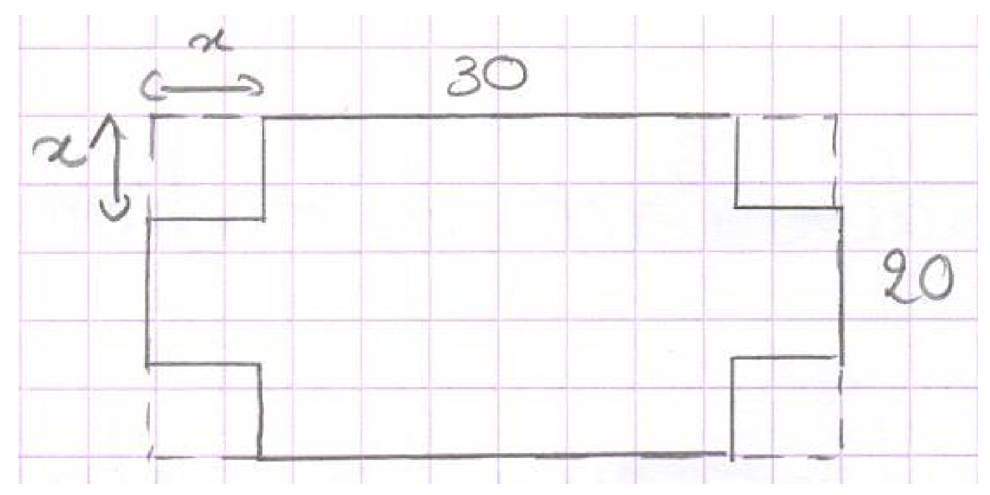
On admet que l'approximation obtenue est la meilleure des approximations affines locales.

Outils : Proposition 6

Commentaire :

On montre ici, en généralisant aux approximations affines de $(1+h)^n$ que, approximativement n petites hausses consécutives de t% correspondent globalement à une hausse de (nt)%.

III.3 Exercice n°3.



But : Déterminer pour quelle valeur de x le volume de la boite est maximal.

Méthode : Rechercher le maximum de la fonction V qui à x associe le volume de la boite.

Outils :

- Définition d'un maximum global (seconde) ;
- *Définition 7 :*
  Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réelle de I.
  On dit **que f(x_0) est un maximum local de f sur I** s'il existe un intervalle ouvert J tel que $x_0 \in J$, $J \subset I$ et f(x_0) soit le maximum de f sur J.
- *Proposition 8 :*
  Si, en x_0 la dérivée f' s'annule en changeant de signe alors f admet un extremum local en x_0.

III.4 Exercice n°4.

But : Tracer la courbe approchée de f telle que f(1) = et, pour tout x > 0, f'(x) = $\frac{1}{x}$.

Méthode : On approche, pour tout h > 0, f(h) par le nombre f(0)+f'(0)h l'approximation affine locale de f(0+h).

Outils : Proposition 6

Commentaire :

On aura ici reconnu qu'il s'agit de construire une courbe approchée de la fonction ln.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°3 p 164, Déclic 1ère ES 2004, modifié).

On considère la fonction f définie sur IR\{0} par $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 1cm.

1. Ecrire f(x) sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x^2}$ où a, b et c sont trois réels à déterminer.
2. Etudier la limite de f en $+\infty$. Montrer que C admet la droite Δ d'équation $y = x - 5$ pour asymptote. Déterminer la position de C par rapport à Δ..
3. Etudier la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Vérifier que $f(1) = 0$. Montrer que $x^3 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x^2 - 4x - 4)$. En déduire les points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 1 et étudier la position de C par rapport à Δ.
6. Calculer f'(x) où f' est la dérivée de f.
7. Si $x \geq 2$, que peut-on en conclure pour le signe de $x^3 - 8$? En déduire le signe de f'(x).
8. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
9. Tracer la droite Δ et la tangente T et placer les points d'intersection de C avec l'axe des abscisses. Tracer la courbe C. On précisera le point où la tangente est horizontale.

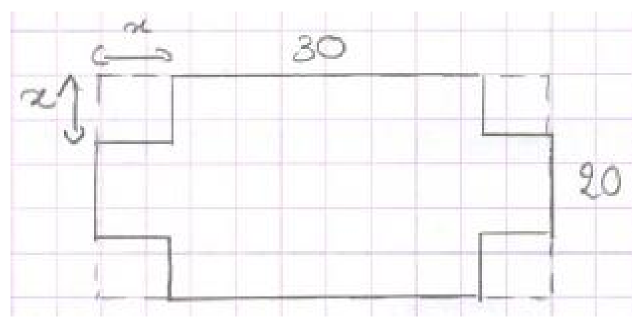
IV.2 Exercice n°2 (n°93 p 84, Transmath 1ère S 2001)

f est la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3$.

1. Donner l'approximation affine locale de f(1+h).
2. Montrer que si $|h| \leq 10^{-1}$ alors $0 \leq [f(1+h) - (1+3h)] \leq 4 \times 10^{-2}$. En déduire une valeur approchée de $(1,01)^3$ en donnant la précision.
3. Dans quel intervalle suffit-il de situer h pour que 1 + 3h soit une approximation de $(1+h)^3$ à 10^{-6} près par défaut ?
4. Que pensez-vous de la validité de l'affirmation suivante : « Augmenter un prix de 2% trois fois de suite c'est presque l'augmenter de 6% » ?

IV.3 Exercice n°3 (n°37 p 115, Terracher 1ère S 2001, modifié).

On écorne les quatre coins d'un rectangle de carton de 30cm sur 20cm en découpant quatre carrés de côté x. On obtient le patron d'une boite rectangulaire. Pour quelle valeur de x le volume de la boite est-il maximal ?



IV.4 Exercice n°4 (n°78 p 95, Terracher 1ère S 2001).

Soit f une fonction définie sur]0 ; +∞[telle que f(1) = 0 et pour tout x >0, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Représenter graphiquement une approximation de C_f :

a) sur [1 ;2] avec le pas h = 0,2 ; en déduire une valeur approchée de f(2) ;
b) sur [2 ; 10] avec le pas h = 1.